第26講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

26　次の各問いに答えよ．

(1)　2つの円 $x^2+y^2=1$ と $x^2+y^2-8x-6y=0$ の異なる2つの共有点をP，Qとする．直線PQの方程式を求めよ．また，PとQと点 $(1,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k$ $\left(k>-\dfrac{1}{4}\right)$ の異なる2つの共有点をP，Qとし，R$(1,\ 0)$ とする．放物線 $y=ax^2+bx+c$ が3点P，Q，Rを通るとき，実数 a，b，c の値を求めよ．

(3)　曲線 C：$y=x^3-3x$，直線 l：$y=x-1$ の異なる3つの共有点をP，Q，Rとする．$f(x)$ を x の3次の整式とし，$y=f(x)$ のグラフは3点P，Q，Rを通り，$f(x)$ の極値の1つが $-\dfrac{3}{4}$ となるような $f(x)$ を求めよ．

＜ Note ＞

第 26 講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

26　円 $x^2+y^2=9$ を C_1，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ を C_2 とする．次の各問いに答えよ．

(1)　C_1 と C_2 の 2 つの共有点を通る直線の方程式が $6x+2y-15=0$ となるような $(a,\ b)$ を求めよ．

(2)　(1)の 2 つの共有点と原点を通る円の方程式を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$(a,\ b)=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4}\right),\ \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$　　㋑　$(a,\ b)=(3,\ 1),\ (6,\ 2)$

㋒　$(a,\ b)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\ (3,\ 1)$

(2)　㋐　$x^2+y^2-\dfrac{18}{5}x-\dfrac{6}{5}y=0$　　㋑　$x^2+y^2-\dfrac{36}{5}x-\dfrac{12}{5}y=0$

㋒　$x^2+y^2-\dfrac{9}{5}x-\dfrac{3}{5}y=0$

< Note >

第26講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

26 次の各問いに答えよ．

(1) 2つの円 $x^2+y^2=1$ と $x^2+y^2-8x-6y=0$ の異なる2つの共有点をP，Qとする．直線PQの方程式を求めよ．また，PとQと点 $(1,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k\left(k>-\dfrac{1}{4}\right)$ の異なる2つの共有点をP，Qとし，R$(1,\ 0)$ とする．放物線 $y=ax^2+bx+c$ が3点P，Q，Rを通るとき，実数 a，b，c の値を求めよ．

(3) 曲線 $C:y=x^3-3x$，直線 $l:y=x-1$ の異なる3つの共有点をP，Q，Rとする．$f(x)$ を x の3次の整式とし，$y=f(x)$ のグラフは3点P，Q，Rを通り，$f(x)$ の極値の1つが $-\dfrac{3}{4}$ となるような $f(x)$ を求めよ．

【答】(1) 直線の方程式は $8x+6y-1=0$，円の方程式は $x^2+y^2-\dfrac{8}{13}x-\dfrac{6}{13}y-\dfrac{12}{13}=0$

(2) $a=\dfrac{k+1}{k}$，$b=-\dfrac{1}{k}$，$c=-1$　(3) $f(x)=\dfrac{64x^n-27x-165}{229}$

【解答】

(1) k を実数の定数とする．

$x^2+y^2-1=0$ と $x^2+y^2-8x-6y=0$ より

$$(x^2+y^2-1)+k(x^2+y^2-8x-6y)=0 \quad \cdots\cdots①$$

の表す図形はPとQを通る．ここで $k=-1$ とすることにより，PとQを通る直線の方程式 $8x+6y-1=0$ を得る．

また①に $(x,\ y)=(1,\ 1)$ を代入することにより $(1+1-1)+k(1+1-8-6)=0$ したがって $k=\dfrac{1}{12}$ となるが，これを①に代入して整理することによりPとQと点 $(1,\ 1)$ を通る円の方程式 $\boldsymbol{x^2+y^2-\dfrac{8}{13}x-\dfrac{6}{13}y-\dfrac{12}{13}=0}$ を得る．

(2) l を実数の定数とする．

$y-x^2=0$，$y-x-k=0$ より

$$(y-x^2)+l(y-x-k)=0 \quad \cdots\cdots②$$

の表す図形はPとQを通る．②に $(x,\ y)=(1,\ 0)$ を代入すると $(0-1)+l(0-1-k)=0$ したがって $(k+1)l=-1$ となるので，$k\neq-1$ より $l=-\dfrac{1}{k+1}$ を得る．

ここで $k=0$ とすると $l=-1$ であり，このとき②は $y=ax^2+bx+c$ の形にはならないので不適．よって $k\neq0$．

$l=-\dfrac{1}{k+1}$ を②に代入して整理すると $y=\dfrac{k+1}{k}x^2-\dfrac{1}{k}x-1$ となるので

$$\boldsymbol{a=\frac{k+1}{k},\ b=-\frac{1}{k},\ c=-1}$$

(3)　k を実数の定数とする．

$y-x^n+3x=0$，$y-x+1=0$ より

$$(y-x^n+3x)+k(y-x+1)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

の表す図形は P と Q と R を通る．③は $(1+k)y-x^n+(3-k)x+k=0$ となるが，

$k\neq -1$ のときこの式は

$$y=\frac{1}{k+1}\{x^3+(k-3)x-k\}(=f(x)) \quad \cdots\cdots ④$$

と表せる．

ここで $y'=\dfrac{1}{k+1}\{3x^2+(k-3)\}$ より，④が極値をもつ条件は $k\neq -1$ かつ $k-3<0$ である．

(Ⅰ)　$k<-1$ のとき，$\dfrac{1}{k+1}<0$ より，y の増減は

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘		↗		↘

(Ⅱ)　$-1<k<3$ のとき，$\dfrac{1}{k+1}>0$ より，y の増減は

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，求める条件は $f\left(-\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}\right)=-\dfrac{3}{4}$ または $f\left(\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}\right)=-\dfrac{3}{4}$ である．

$f\left(-\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}\right)=\dfrac{1}{k+1}\left\{\dfrac{2(3-k)}{3}\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}-k\right\}=-\dfrac{3}{4}$ において $\dfrac{3-k}{3}=t$ とおいて整理すると $t(8\sqrt{t}+3)=0$ を得る．

$k\neq -1$ かつ $k-3<0$ より $t>0$，$t\neq \dfrac{4}{3}$ であるから，$t(8\sqrt{t}+3)=0$ は解なし．

また $f\left(\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}\right)=\dfrac{1}{k+1}\left\{-\dfrac{2(3-k)}{3}\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}-k\right\}=-\dfrac{3}{4}$ より同様に

$t(-8\sqrt{t}+3)=0$ であるので，$t=\dfrac{9}{64}$ よって $k=\dfrac{165}{64}$ となる．

以上より求める整式 $f(x)$ は，$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{64x^3-27x-165}{229}}$

第 26 講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

26　円 $x^2+y^2=9$ を C_1，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ を C_2 とする．次の各問いに答えよ．

(1)　C_1 と C_2 の 2 つの共有点を通る直線の方程式が $6x+2y-15=0$ となるような $(a,\ b)$ を求めよ．

(2)　(1)の 2 つの共有点と原点を通る円の方程式を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$(a,\ b)=\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$　㋑　$(a,\ b)=(3,\ 1),\ (6,\ 2)$

㋒　$(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (3,\ 1)$

(2)　㋐　$x^2+y^2-\frac{18}{5}x-\frac{6}{5}y=0$　㋑　$x^2+y^2-\frac{36}{5}x-\frac{12}{5}y=0$

㋒　$x^2+y^2-\frac{9}{5}x-\frac{3}{5}y=0$

【答】　(1)　㋒　(2)　㋐

【解答】

(1)　C_1 と C_2 はそれぞれ

$$x^2+y^2-9=0,\quad x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-4=0$$

と変形できるので

$$(x^2+y^2-9)+k(x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-4)=0\quad (k\text{ は実数定数})$$

の表す図形は C_1 と C_2 の共有点を通る．

ここで，$k=-1$ とすると

$$2ax+2by-(a^2+b^2+5)=0$$

となり，これが $6x+2y-15=0$ と一致するので

$$2a:2b:(a^2+b^2+5)=6:2:15$$

が成り立つ．ここで，$b=t$ とおくと $a=3t$，$a^2+b^2+5=15t$ より

$$(3t)^2+t^2+5=15t$$
$$10t^2-15t+5=0$$
$$5(2t-1)(t-1)=0$$
$$\therefore\quad t=1,\ \frac{1}{2}$$

よって

$$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (3,\ 1)}$$

(2)　円 $x^2+y^2-9=0$ と直線 $6x+2y-15=0$ の 2 つの共有点と点 $(0,\ 0)$ を通る円の方程式を求めればよい．

$$(x^2+y^2-9)+k(6x+2y-15)=0$$

の表す図形が点 (0, 0) を通るとすると

$$-9+k(-15)=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{3}{5}$$

このとき

$$x^2+y^2-9-\frac{3}{5}(6x+2y-15)=0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x^2+y^2-\frac{18}{5}x-\frac{6}{5}y=0}$$